21-03-17

ορισμός: Μια επίπεδη αλγεβρική καμπύλη $V(f)$ είναι το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου K^2 που μηδενίζουν κάποιο πολυώνυμο $f(x,y)\in K[x,y]$

$$V(f)=\{(x_0,y_0)\in K^2 \mid f(x_0,y_0)=0\}$$

* Αν το πολυώνυμο $f(x,y)\in K[x,y]$ είναι ανάγωγο τότε η καμπύλη λέγεται ανάγωγη.
* Αν $f(x,y)=q_1(x,y)\,q_2(x,y)\cdots q_s(x,y)$ η ανάλυση του f σε γινόμενο αναγώγων τότε

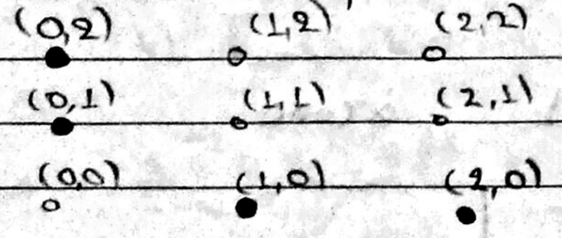
$$V(f)=V(q_1)\cup V(q_2)\cup\dots V(q_s)$$

και κάθε μια καμπύλη $V(q_i)$ ονομάζεται ανάγωγη συνιστώσα της $V(f)$.

Παραδείγματα

1) $V(x^2+y^2-1)\subseteq \mathbb{Z}_3^2$ $\qquad \mathbb{Z}_3=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2}\}$

$V_K(f)$



2) $V_{\mathbb{R}}(x^2+y^2+1)=\emptyset$

3) $V_{\mathbb{Q}}(x^2+y^2-3)=\{(x_0,y_0)\in\mathbb{Q}^2 \mid x_0^2+y_0^2-3=0\}$

*

Έστω $(x_0,y_0)\in\mathbb{Q}^2$ τέτοιο ώστε: $x_0^2+y_0^2=3$ $(*)$

$$\left.\begin{aligned} x_0&=\frac{\kappa}{\lambda}\\ y_0&=\frac{\mu}{\lambda}\end{aligned}\right\} \overset{(*)}{\Longrightarrow} \left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2=3$$

$\kappa^2+\mu^2=3\lambda^2 \qquad \kappa^2+\mu^2=0 \mod$

$\mu\kappa\delta(\kappa,\lambda,\mu)=1$

$\lambda\neq 0$

Άρα, $(\kappa,\lambda,\mu)\neq(0,0,0)$

k	k^2	λ^2	$k^2+\lambda^2$
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
	1	1	2 (!!)

Άρα, $k^2+\mu^2 \equiv 0 \bmod 3$ αν και μόνο αν
$k^2 \equiv 0 \bmod 3$ και $\mu^2 \equiv 0 \bmod 3$

$3 \mid k^2$ και $3 \mid \mu^2 \Rightarrow \underbrace{3 \mid k, 3 \mid \mu}_{3 \text{ πρώτος}}$

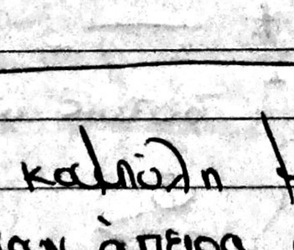
$k = 3\nu \quad \mu = 3\rho$

$(3\nu)^2 + (3\rho)^2 = 3\lambda^2$

$3(\nu^2+\rho^2) = \lambda^2 \Rightarrow 3 \mid \lambda^2 \Rightarrow \underbrace{3 \mid \lambda}_{3 \text{ πρώτος}}$

$\Rightarrow 3 \mid \text{μκδ}(k,\mu,\lambda) = 1$, άτοπο

$V_{\mathbb{Q}}(x^2+y^2-3)$



$\square$

Μια 2ου βαθμού καμπύλη με συντελεστές ρητούς ή θα έχει άπειρα σημεία ή κανένα

Παρατήρηση

Ρητές καμπύλες

<u>ορισμός</u>: Μια ανάγωγη επίπεδη αλγεβρική καμπύλη λέγεται ρητή αν υπάρχουν ρητές συναρτήσεις $x(t)$ $y(t)$ (δηλ. πηλίκα πολυωνύμων στο t) τέτοια ώστε:

(α) $f(x(t), y(t)) = 0$

(β) για κάθε σημείο $(x_0, y_0) \in V(f)$ εκτός από πεπερασμένες εξαιρέσεις, $\exists$ μοναδικό $t_0 \in K$ τέτοιο ώστε:

$$x_0 = x(t_0)$$
$$y_0 = y(t_0)$$

$\boxed{\text{SOS}}$

<u>παράδειγμα</u>

Ο κύκλος $V_{\mathbb{R}}(x^2+y^2-1)$ είναι ρητή καμπύλη

(α) $$x(t) = \frac{2t}{t^2+1}$$

$$y(t) = \frac{t^2-1}{t^2+1}$$

$$x(t)^2 + y(t)^2 - 1 = \left(\frac{2t}{t^2+1}\right)^2 + \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2 - 1 =$$

$$= \frac{4t^2 + t^4 - 2t^2 + 1 - (t^2+1)}{(t^2+1)^2}$$

$$= \frac{2t^2 + t^4 + 1 - t^4 - 2t^2 - 1}{(t^2+1)^2} = 0$$

(β) Έστω (x_0, y_0) σημείο του κύκλου $V(x^2+y^2-1)$ τω

$$x_0^2 + y_0^2 = 1$$

$$t_0 = \frac{y_0+1}{x_0} \quad (*)$$

$$x(t_0) = \frac{2t_0}{t_0^2+1} = \frac{2\left(\frac{y_0+1}{x_0}\right)}{\left(\frac{y_0+1}{x_0}\right)^2+1} = \frac{2(y_0+1)x_0}{(y_0+1)^2+x_0^2} =$$

$$= \frac{2(y_0+1)x_0}{y_0^2+1+2y_0+x_0^2} = \frac{2(y_0+1)x_0}{1+1+2y_0} = \frac{2\cancel{(y_0+1)}x_0}{2\cancel{(y_0+1)}} = x_0$$

Το ίδιο συμβαίνει και για το $y(t_0)$.
Δηλ, $y(t_0) = y_0$.
Τα σημεία με $x_0 = 0$: $(0,1)$ και $(0,-1)$.

$V(x^2+y^2-1)$ $\quad x(t) = \dfrac{2t}{t^2+1}$, $y(t) = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$

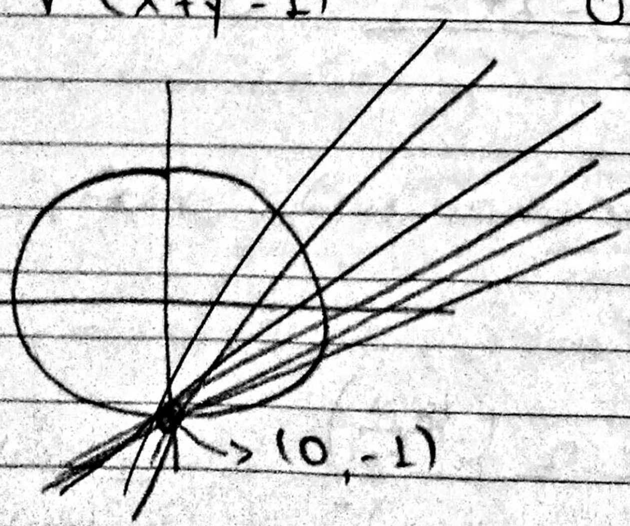
$f(x(t), y(t)) = 0$
για κάθε $(x_0, y_0) \in V(x^2+y^2-1)$ $\exists$ t_0
$x(t_0) = x_0$
$y(t_0) = y_0$ (εκτός του σημείου $(0,1)$)
Μοναδικότητα του t_0
Έστω $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ και $x(t_1) = x_0$, $y(t_1) = y$

$$\frac{y_0+1}{x_0} = \frac{y(t_0)+1}{x(t_0)} = \frac{t_0^2-1 / t_0^2+1 \;+1}{\dfrac{2t_0}{t_0^2+1}} =$$

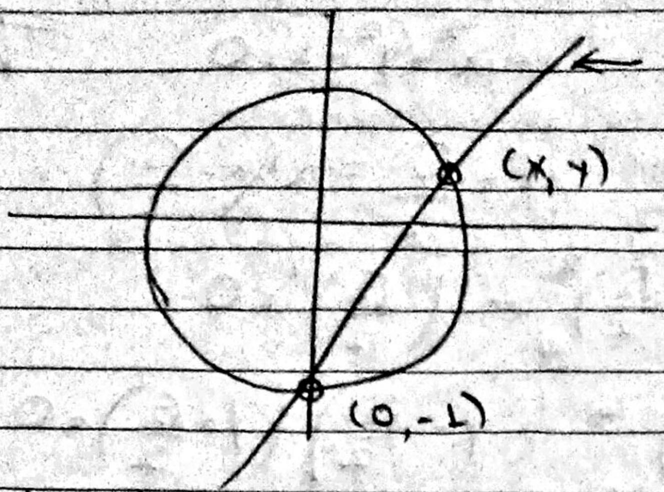
$$= \frac{t_0^2-1+t_0^2+1}{2t_0} = \frac{2t_0^2}{2t_0} = t_0$$

$$\frac{y_0+1}{x_0} = \frac{y(t_1)+1}{x(t_1)} = \dots = t_1 \quad \text{Άρα, } t_1 = t_0$$

Πως βρίσκω το ⊛.
$V(x^2+y^2-1)$ $\quad$ Οικογένεια ευθειών που διέρχονται από το σημείο $(0,-1)$.



$x^2+y^2=1$



ευθεία που διέρχεται από το $(0,-1)$ και έχει κλίση t.

$$x^2+y^2=1$$
$$y-(-1)=t(x-0)$$
$$\Rightarrow y+1=tx$$

$$t_0=\frac{y_0+1}{x_0}$$

Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y+1=tx \Rightarrow y=-1+tx \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-1=0 \\ y+1=tx \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2+(y-1)(y+1)=0 \\ y+1=tx \end{array}$$

$$x^2+(-2+tx)tx=0$$
$$y+1=tx$$

$$x(x+(-2+tx)t)=0$$
$$y+1=tx$$

$x=0$ ή $x-2t+t^2x=0$

$y+1=0$ $\quad$ $y+1=tx$

$(0,-1)$ $\quad$ $x(1+t^2)=2t$

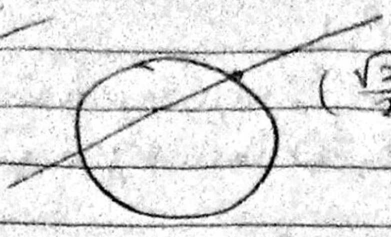
$y+1=tx \Rightarrow x=\dfrac{2t}{1+t^2}$

$x^2+y^2=1$

$y-(-1)=t(x-0)\Rightarrow y+1=tx$

$$y=tx-1=t\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)-1$$
$$=\frac{t^2-1}{1+t^2}$$

$\square$



$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\quad x^2+y^2-1=0$

$$y-\frac{\sqrt{2}}{2} = t\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$x^2+y^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=0$$

$$\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(y+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$$

$$\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+t\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+t\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$$

$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad x+\frac{\sqrt{2}}{2}+t\left(\sqrt{2}+t\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

$y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad y-\frac{\sqrt{2}}{2}=t\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$x+\frac{\sqrt{2}}{2}+t\sqrt{2}+t^2x-t^2\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

$$x(1+t^2)=t^2\frac{\sqrt{2}}{2}-t\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x=\frac{t^2\frac{\sqrt{2}}{2}-t\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{t^2+1}$$

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}+t\left(\frac{t^2\frac{\sqrt{2}}{2}-t\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{t^2+1}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}t^2+\frac{\sqrt{2}}{2}+t^3\frac{\sqrt{2}}{2}-t^2\sqrt{2}-t\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}(t^3+t)}{t^2+1}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}t^2+\frac{\sqrt{2}}{2}+\cancel{t^3\frac{\sqrt{2}}{2}}-t^2\sqrt{2}-t\frac{\sqrt{2}}{2}-\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}t^3}-\frac{\sqrt{2}}{2}t}{t^2+1}$$

$$=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}t^2-\sqrt{2}t+\frac{\sqrt{2}}{2}}{t^2+1}$$

□

Ασκησούλα: $x^2+y^2-1=0$

με $x=2$ και $y=i\sqrt{3}$

παραμετρικοποίηση πάνω από τους μιγαδικούς

(όπως κάναμε προηγουμένως)

Προσοχή

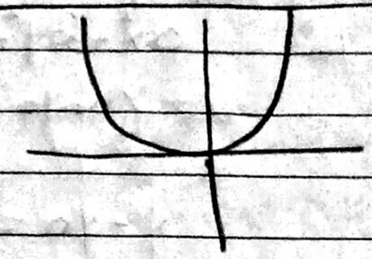
Παραδείγματα

παραμετρικοποίηση της παραβολής

$V(y-x^2)$

$x=t$

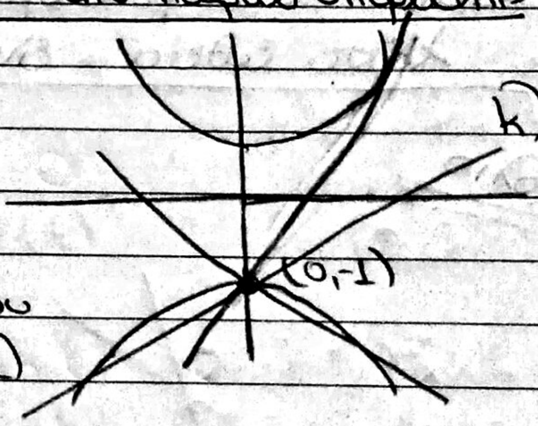
$y=t^2$



□

παραμετρικοποίηση της ~~παραβ~~ υπερβολής

$V(x^2-y^2+1)$



$y-(-1)=t(x-0)$

Οικογένεια ευθειών που διέρχονται από το $(0,-1)$

$x^2-y^2+1=0 \Rightarrow x^2+(1-y)(1+y)=0$

$y+1=tx$ $\qquad$ $y+1=tx$

$x^2+(1+1-tx)tx=0$ $\qquad$ $y=-1+tx$

$x=0$

$y=-1$

$x+2t-t^2x=0$

$y=-1+tx$

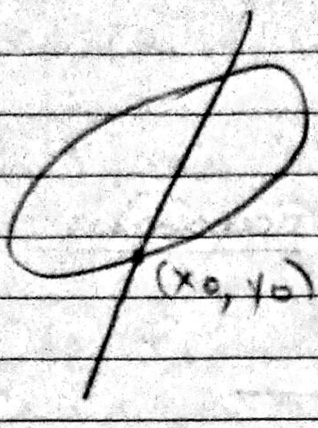
$$\begin{cases} x=\dfrac{-2t}{1-t^2}=\dfrac{2t}{t^2-1} \\ y=-1+t\left(\dfrac{2t}{t^2-1}\right)=\dfrac{-t^2+1+2t^2}{t^2-1}=\dfrac{t^2+1}{t^2-1} \end{cases}$$

ορίζεται για όλα τα t εκτός από 1 και -1

$x^2(t) - y^2(t) + 1 = \dots$

Κάνω έλεγχο $\forall x_0, y_0$ της καμπύλης

□



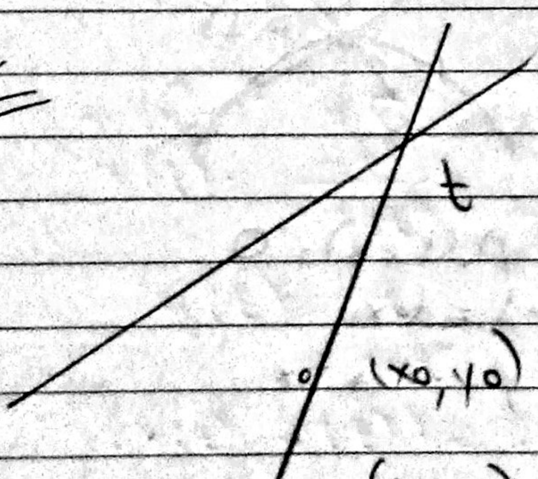
$$a x^2 + b y^2 + \gamma x y + \delta x + \varepsilon y - a x_0^2 - b y_0^2 - \gamma x_0 y_0 - \delta x_0 - \varepsilon y_0 = 0$$

$$y - y_0 = t(x - x_0)$$

□

Κάθε δευτεροβάθμια είναι ρητή
κάθε ευθεία είναι ρητή.

Σχόλιο

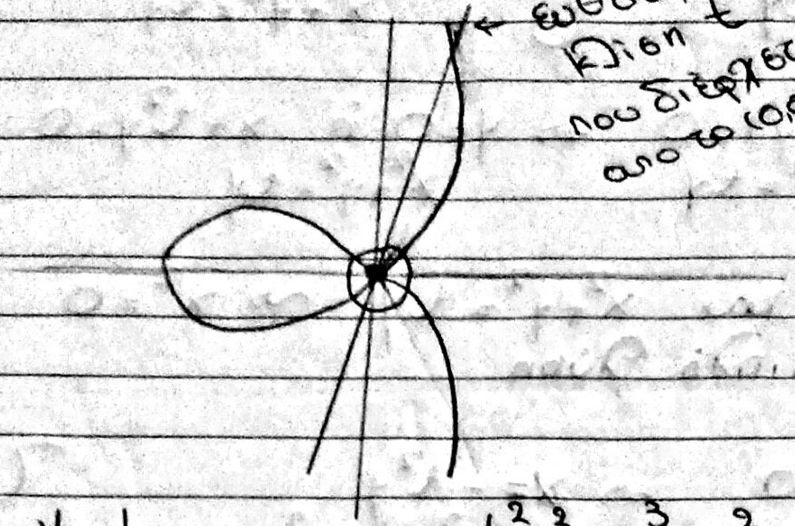


$$L = a x + b y + \gamma$$

$(x_0, y_0) \in V(L)$

□

\# $V(y^2-x^3-x^2)$



ευθεία με κλίση t που διέρχεται από το $(0,0)$

Σχολιάκι: το θέμα είναι να εκμεταλλευτώ το ιδιόμορφο σημείο

$y=tx$ $\qquad$ $t^2x^2-x^3-x^2=0$

$y^2-x^3-x^2=0$ $\qquad$ $x^2(t^2-x-1)=0$

$y=0$ $\quad$ ή $\quad$ $t^2-x-1=0$ $\qquad$ $x=t^2-1$

$t=0$ $\qquad$ $y=tx$ $\qquad$ $y=t(t^2-1)$

$=t^3-t$

$x(t)=t^2-1$

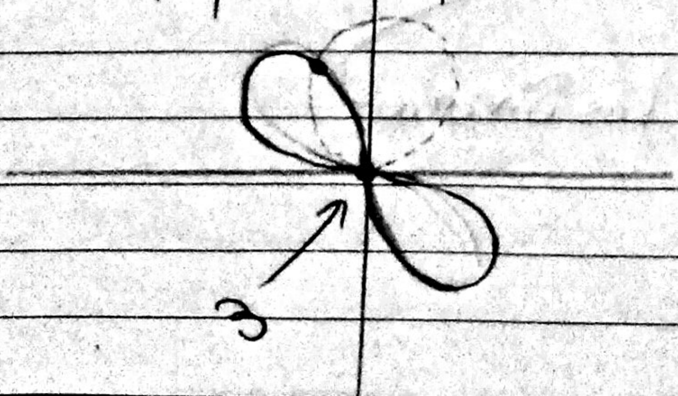
$y(t)=t^3-t$

$y(t)^2-x(t)^3-x(t)^2=\dots=0$

Το σημείο $(0,0)$ είναι η εξαίρεση. Δηλαδή, για το συγκεκριμένο σημείο έχω δύο τιμές του t, $t=1$ και $t=-1$. □

\# Στην ιστοσελίδα του στο Mathema έχει ασκήσεις \#

\# $V(xy+(x^2+y^2)^2)$



$x^2+y^2-ty=0$

οικογένεια κύκλων

$x^2+\left(y-\frac{t}{2}\right)^2=\frac{t^2}{4}$

$$xy + (x^2+y^2)^2 = 0 \quad \left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \Rightarrow xy + t^2y^2 = 0$$
$$x^2+y^2 = ty \qquad\qquad x^2+y^2 = ty$$

οικογένεια κύκλων

$$y(x+t^2y) = 0 \Rightarrow y=0 \text{ ή } x+t^2y=0$$
$$x^2+y^2 = ty \qquad x^2+y^2 = ty$$

Αν $y=0$ και $x^2+y^2 = ty \rightsquigarrow x^2=0$
$(0,0)$ διπλή λύση

$$x+t^2y = 0 \Rightarrow x = -t^2y$$
$$x^2+y^2 = ty \quad (-t^2y)^2+y^2-ty=0 \quad \Bigg\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -t^2y$$
$$y(t^4y+y-t) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-t^2y \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} t^4y+y-t=0 \\ x=-t^2y \end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$(0,0) \qquad y = \frac{t}{1+t^4}, \quad x = \frac{-t^3}{1+t^4}$$

Έχουμε, $xy + (x^2+y^2)^2 = 0$
$$x(t) = \frac{-t^3}{1+t^4}$$
$$y(t) = \frac{t}{1+t^4}$$
$$f(x(t), y(t)) = \dots = 0$$

$$t_0 = \frac{x_0^2+y_0^2}{y_0}$$

και η μοναδικότητα μας δίνεται

□